E.N.S.I. PROGRAMME M

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES

DURÉE : 2 heures

PRÉLIMINAIRE

Dans tout le problème, l'ensemble R^n sera considéré aussi bien comme espace affine que comme espace vectoriel. Un élément $x \in R^n$ sera donc qualifié indifféremment de point x ou de vecteur x.

D'autre part, on rappelle que, si K est une partie de R^n, on peut munir l'ensemble des fonctions numériques définies sur K d'une structure d'espace vectoriel sur R de la façon suivante :

— La somme de deux éléments quelconques f_1 et f_2 de cet ensemble est définie comme l'application $f_1 + f_2$ suivante :

$$x \to (f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x)$$

— La multiplication d'un élément quelconque f de cet ensemble par un élément quelconque μ de R est définie comme l'application μf suivante .

$$x \to (\mu f)(x) = \mu f(x)$$

Le but du problème qui suit est de construire, pour une fonction numérique de deux variables, une méthode d'interpolation polynômiale d'ordre 2, sur un triangle rectangle isocèle quelconque de R^2.

PREMIÈRE QUESTION

Soient $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$ des points distincts de R^n, non tous contenus dans un même hyperplan et soit A la matrice de vecteurs colonnes $a_1, a_2, \ldots, a_i, \ldots, a_{n+1}$ où a_i désigne le vecteur colonne

$$\begin{bmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{bmatrix} :$$

on désigne par $\tilde{A}$ la matrice carrée obtenue en rajoutant à A le $(n+1)$-ième vecteur ligne $e = (1, 1, \ldots, 1) \in R^{n+1}$.

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} A \\ e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_{n+1} \\ 1 & 1 & \ldots & 1 \end{bmatrix}$$

Soient $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ un élément de R^n et $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n+1})$ un élément de R^{n+1}; on désigne par $\hat{x}$ et λ les matrices colonnes suivantes :

$$\hat{x} = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_{n+1} \end{bmatrix}$$

Montrer que le système $\tilde{\mathrm{X}}\lambda = \hat{x}$ a une solution unique $\lambda(x)$ pour x fixé dans R^n. On construit ainsi $(n+1)$ applications $\lambda_i : x \mapsto \lambda_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots, n+1$, de R^n dans R. Vérifier que ces fonctions représentent les coordonnées barycentriques du point x par rapport aux points $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$.

DEUXIÈME QUESTION

Soit maintenant $\mathrm{X} = \{x_1, x_2, \ldots, x_N\}$ un ensemble de N points de R^n distincts et non tous contenus dans un même hyperplan, on supposera que $N > n$; on désigne par K l'ensemble des points de R^n de la forme : $\sum_{i=1}^{i=N} \mu_i x_i$ avec $0 \leqslant \mu_i \leqslant 1$, $i = 1, 2, \ldots, N$ et $\sum_{i=1}^{i=N} \mu_i = 1$, et par P un espace vectoriel, de dimension N, de fonctions numériques définies sur K. On dit que l'ensemble X est P-unisolvent, s'il existe une fonction unique $f \in \mathrm{P}$ prenant aux points x_i, $i = 1, 2, \ldots, N$, des valeurs fixées à l'avance α_i, $i = 1, 2, \ldots, N$, c'est-à-dire telle que :

$$f(x_i) = \alpha_i \quad , \quad i = 1, 2, \ldots, N$$

a. Montrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour que X soit P-unisolvent est que les fonctions f_i, $i = 1, 2, \ldots, N$, suivantes :

$$\begin{cases} f_i(x_j) = \delta_{ij} \quad , \quad i = 1, 2, \ldots, N, \quad j = 1, 2, \ldots, N \\ \delta_{ii} = 1 \quad \text{et} \quad \delta_{ij} = 0 \quad \text{si} \quad i \neq j \end{cases}$$

constituent une base de P.

b. On considère, maintenant, le cas où $n = 2$ et où $\mathrm{X} = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$ avec :

$$x_1 = (0, 0) \qquad x_2 = (1, 0) \qquad x_3 = (0, 1)$$

$$x_4 = \left(\frac{1}{2}, 0\right) \qquad x_5 = \left(0, \frac{1}{2}\right) \qquad x_6 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

alors K désigne le triangle rectangle isocèle de sommets x_1, x_2, x_3. De plus, soit P_2 l'espace vectoriel des polynômes de deux variables qu'on notera ξ_1 et ξ_2, à coefficients réels et de degré inférieur ou égal à 2. Montrer, en calculant explicitement les fonctions de base f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6 que X est P_2-unisolvent.

c. Exprimer ces fonctions de base à l'aide des coordonnées barycentriques λ_1, λ_2, λ_3 du point courant x par rapport aux points x_1, x_2, x_3. Pour cela on remarquera que f_1 (resp. f_2, f_3) ne dépend que de λ_1 (resp. λ_2, λ_3) et que f_4 (resp. f_5, f_6) ne dépend que de λ_1 et λ_2 (resp. λ_1 et λ_3, λ_2 et λ_3).

TROISIÈME QUESTION

Soit H une transformation affine inversible de R^n dans lui-même définie comme suit par un opérateur linéaire inversible B de R^n dans R^n et par un vecteur b de R^n :

$$\mathrm{H}(x) = \mathrm{B}.x + b$$

On désigne respectivement par X' et K' les images de X et K par H et par P' l'ensemble $\{f' \mid f' = f \circ \mathrm{H}^{-1}, f \in \mathrm{P}\}$ qui est un espace vectoriel, de dimension N, de fonctions numériques définies sur K'.

a. Montrer, en exhibant les fonctions de base de P', que X' est P'-unisolvent.

b. Montrer que le point $x' = \mathrm{H}(x)$ possède les mêmes coordonnées barycentriques par rapport aux points $a'_i = \mathrm{H}(a_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n+1$, que x par rapport aux points a_i, $i = 1, 2, \ldots, n+1$.

c. On se place à nouveau dans l'espace R^2 où l'on choisit pour ensemble X' l'ensemble des six points suivants :

$$x'_1 = (5, 6) \qquad x'_2 = (6, 9) \qquad x'_3 = (7, 10)$$

$$x'_4 = \left(\frac{11}{2}, \frac{15}{2}\right) \qquad x'_5 = (6, 8) \qquad x'_6 = \left(\frac{13}{2}, \frac{19}{2}\right).$$

Déterminer H, puis H^{-1}; en déduire les coordonnées barycentriques λ'_1, λ'_2, λ'_3 d'un point $x = (\xi_1, \xi_2)$ du plan par rapport aux points x'_1, x'_2, x'_3.

Enfin on demande de déduire de tout ce qui précède un polynôme de deux variables, à coefficients réels et de degré inférieur ou égal à 2 coïncidant aux points x'_1, x'_2, x'_3, x'_4, x'_5, x'_6, avec la fonction g de R^2 dans R définie par

$$g(\xi_1, \xi_2) = \sin \xi_1 \xi_2 + \cos \xi_1 \xi_2$$

On donnera les coefficients de ce polynôme à 10^{-4} près.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail